

37. Mikola Sándor fizikaverseny 2018 Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam
Gimnázium

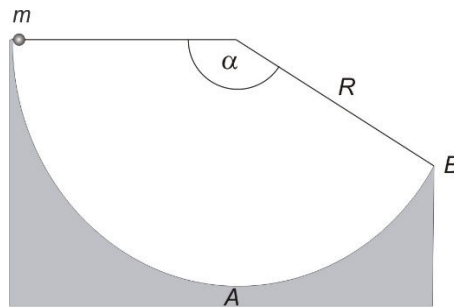
Megoldások

1. Egy $\alpha = 150^\circ$ -os középponti szögű, $R = 0,8$ m sugarú, körív keresztmetszetű hengeres vályú úgy van elhelyezve a vízszintes talajon, hogy felső végének érintősíkjá függőleges legyen. Ennek a vályúnak legfelső pontjából kezdősebesség nélkül elengedünk egy kisméretű, $m = 0,2$ kg tömegű testet.

a) Mekkora erővel hat a vályú a kis testre, amikor éppen a pálya legalsó, A pontján halad át?

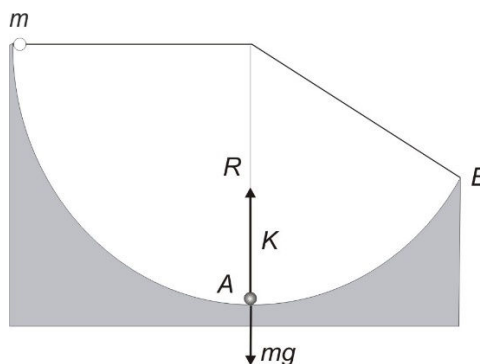
b) Mekkora a kis testre ható eredő erő „ugrása” (hirtelen megváltozása) a B ponton való áthaladás pillanatában?

c) Maximálisan milyen magasra emelkedik a kis test kényszerpályájának legmélyebb pontjának szintjétől mérve a B ponton való áthaladás után?
 (Minden súrlódás és közegellenállás elhanyagolható. Számoljunk $g = 10$ m/s²-tel!)



(dr. Wiedemann László, Budapest)

Megoldás. a) Tekintsük az ábrát!



A kis testre hat a nehézségi erő, valamint a keresett kényszererő. Ezek vektori összege okozza a centripetális gyorsulást. Ezek egy egyenesbe eső, ellentétes irányú erők, így a mozgásegyenlet

$(\sum F = ma_{cp})$ egyszerűen felírható:

$$K - mg = m \frac{v^2}{R},$$

ahonnan

$$K = m \left(\frac{v^2}{R} + g \right). \quad (1)$$

A test A pontbeli sebességének négyzete az energiátételből adódik:

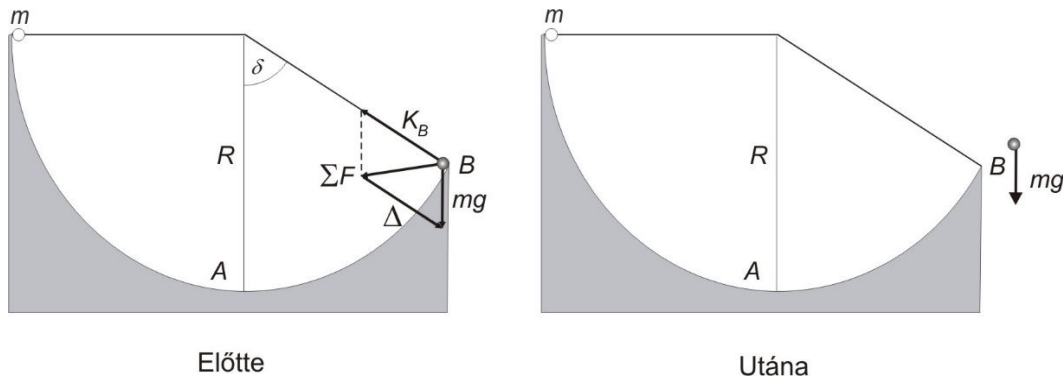
$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = 2gR, \quad (2)$$

ugyanis a test süllyedése éppen sugárnyi nagyságú.

(2)-t (1)-be írva kapjuk a keresett kényszererő nagyságát:

$$K = m \left(\frac{2gR}{R} + g \right) = 3mg = 3 \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \text{ N}.$$

b) Meg kell határozni a B pontban ható eredő erőt, amely annak elhagyása pillanatában a nehézségi erőre változik. A keresett megváltozást jelöljük Δ -val!



Az ábrából látszik, hogy a hirtelen megváltozás („ugrás”) az eredő erő és a nehézségi erő különbségem vagyis a B -pontbeli kényszererő ellentettje. Ennek a nagyságára vagyunk kíváncsiak. Keressük tehát az ottani kényszererő nagyságát!

A mozgásegyenlet szerint:

$$K_B - mg \cos \delta = m \frac{v_B^2}{R} \rightarrow K_B = m \left(\frac{v_B^2}{R} + g \cos \delta \right). \quad (3)$$

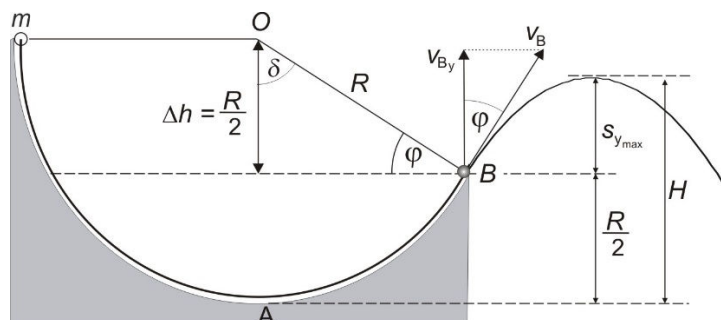
Az itt szereplő δ szög az ábra alapján $\delta = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. A B -pontbeli sebesség négyzetét az energiátételből kaphatjuk:

$$mg \frac{R}{2} = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B^2 = gR. \quad (4)$$

(4)-et (3)-ba írva kapjuk:

$$K = m \left(\frac{gR}{R} + g \cos \delta \right) = mg(1 + \cos \delta) = 0,2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1 + \cos 60^\circ) = 3 \text{ N}.$$

c) A kis test a B pontban hagyja el a kényszerfelületet. Innen ferde hajítási pályán folytatja útját. A pálya legalsó pontjának szintjétől való maximális emelkedés H magassága a B pont magasságának és a ferde hajítás maximális magasságának összege. A B pont éppen $R/2$ magasan helyezkedik el, ugyanis az ábrán látható BOA háromszög egyenlő oldalú. Ez következik abból, hogy a jelzett φ szög pótszöge δ .



A hajítás emelkedési magasságát a B ponttól számítjuk. Ehhez szükségünk van a B pontbeli pillanatnyi sebesség függőleges komponensének nagyságára, ui. az emelkedés magassága

$$s_{y_{\max}} = \frac{v_y^2}{2g}.$$

A test v_B sebessége az energiátételből kapható:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2g \frac{R}{2}} = \sqrt{gR}.$$

Ennek függőleges komponense:

$$v_{B_y} = v_B \cdot \cos \varphi = \sqrt{gR} \cos \varphi.$$

Ezzel a ferde hajítás magasságára kapjuk:

$$s_{y_{\max}} = \frac{(\sqrt{gR} \cdot \cos \varphi)^2}{2g} = \frac{R}{2} \cos^2 \varphi.$$

Figyelembe véve, hogy a φ szög 30° , a keresett szintkülönbség:

$$H = \frac{R}{2} + s_{y_{\max}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos^2 \varphi = \frac{R}{2} (1 + \cos^2 \varphi) = \frac{0,8 \text{ m}}{2} (1 + \cos^2 30^\circ) = \mathbf{0,7 \text{ m}}.$$

2. Egy 40 cm hosszú vékony fonálra felfüggesztünk egy m tömegű kemény golyót és a fonalat feszesen tartva a függőlegeshez képest 60° -os szögben kitérítjük. A kitérített golyó eredeti helyére, a vízszintes talajra elhelyezünk egy M tömegű másik golyót és a rendszert magára hagyjuk. A két test tökéletesen rugalmas ütközés után egyenlő nagyságú, ellentétes irányú sebességgel indul.

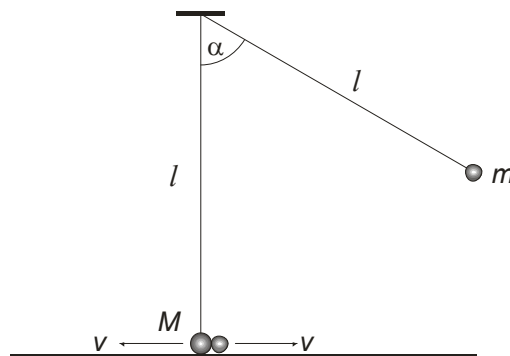
a) Mekkora a M/m arány?

b) Mekkora az ütközés utáni sebességek?

c) Ütközés után milyen magasra emelkedik az m tömegű test?

d) Mekkora – közvetlen az ütközés előtti és utáni pillanatban – a fonálerők aránya?

(Számoljunk $g = 10 \text{ m/s}^2$ -tel!)



(Dudics Pál, Debrecen)

Megoldás. a) Az m tömegű test helyzeti energiája

$$E_h = mg(l - l \cos \alpha),$$

ami leérkezéskor mozgási energiává alakul, tehát

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgl(1 - \cos \alpha),$$

ahonnan a sebesség leérkezéskor:

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,4 \text{ m} (1 - \cos 60^\circ)} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ekkora sebességgel ütközik az M tömegű golyóval. A tökéletesen rugalmas ütközés után mindkét test azonos nagyságú v sebességgel indul az ábra szerint jobbra, ill. balra. A rugalmas ütközésre vonatkozó impulzus (lendület) és energia megmaradásának tétele szerint:

$$mv_1 = Mv - mv \rightarrow mv_1 = (M - m)v \rightarrow v = \frac{m}{M - m}v_1, \quad (\text{I.})$$

és

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow mv_1^2 = (M + m)v^2. \quad (\text{II.})$$

(I.)-ből a v sebességet (II.)-be írva kapjuk:

$$mv_1^2 = (M + m) \frac{m^2 v_1^2}{(M - m)^2}.$$

Egyszerűsítve:

$$1 = (M + m) \frac{m}{(M - m)^2}$$

Rendezve:

$$M^2 - 2Mm + m^2 = Mm + m^2 \rightarrow M^2 = 3Mm,$$

azaz

$$\frac{M}{m} = 3.$$

b) Az ütközés utáni sebességet ennek (I.)-be való behelyettesítésével kapjuk:

$$v = \frac{m}{M - m}v_1 = \frac{m}{3m - m}v_1 = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ezzel a sebességgel indulva a test

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,05 \text{ m}$$

magasra emelkedik.

d) Az ütközés előtt a centripetális (eredő) erő a nehézségi erő és a keresett fonálerő vektori összege:

$$K_1 - mg = \frac{mv_1^2}{l} \rightarrow K_1 = m \left(g + \frac{v_1^2}{l} \right),$$

hasonlóképpen ütközés után:

$$K_2 = m \left(g + \frac{v^2}{l} \right).$$

A kettő aránya:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\left(g + \frac{v_1^2}{l} \right)}{\left(g + \frac{v^2}{l} \right)} = \frac{10 + \frac{4}{0,4}}{10 + \frac{1}{0,4}} = \frac{20}{12,5} = 1,6.$$

3. Motorkerékpáros $R = 20$ m sugarú körpályán nyugalmi állapotból indulva mindvégig egyenletesen növekvő sebességgel halad. Az első $t_1 = 4$ s alatt $s_1 = 8$ m utat tett meg. Indulástól számítva mennyi idő alatt és mekkora út megtétele után kétszeresíti meg gyorsulását?

(Holics László, Budapest)

Megoldás. A feladatszöveg szerint a motorkerékpáros kerületi (érintőleges) gyorsulása

$$a_t = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 8 \text{ m}}{4^2 \text{ s}^2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{állandó.}$$

A keresett időpillanatban a gyorsulás $a = 2a_0 = 2a_t = 2 \text{ m/s}^2$.

A normálgyorsulás (centripetális gyorsulás):

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(a_t t)^2}{R}.$$

Az ábrán mutatott geometriai viszonyokból:

$$a_n = a \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a_t \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Beírva a normál-gyorsulás kifejezését:

$$\frac{(a_t t)^2}{R} = a_t \sqrt{3},$$

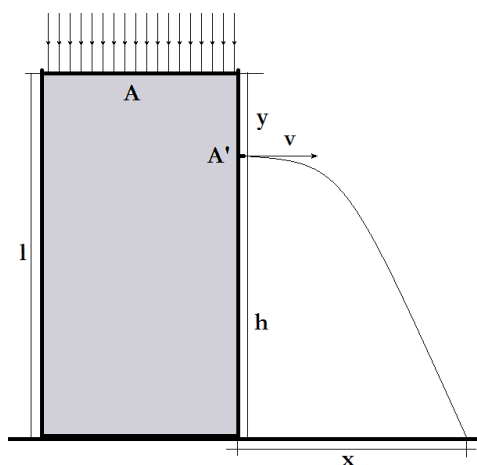
Innen a keresett idő:

$$t = \frac{R\sqrt{3}}{a_t} = \sqrt{\frac{20 \text{ m}\sqrt{3}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx \mathbf{5,89 \text{ s.}}$$

Ezalatt megtett útja

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5,89^2 \text{ s}^2 \approx \mathbf{17,35 \text{ m.}}$$

4. Egy $V =$ kétezer literes, $l = 2,5$ méter magas, függőleges tengelyű, nyitott tetejű, körhenger alakú tartály színültig van vízzel. Éppen elkezd esni az eső, amikor kilyukad a tartály oldala. A kerek lyuk átmérője $d = 1,6$ mm. Óránként 25 mm eső esik.



a) Az aljától mérve milyen magasan lyukadt ki a tartály, ha benne a vízszint nem változik, amíg az eső esik?

b) Hol ér földet a lyukon kiömlő víz? (A talaj vízszintes.)

c) Legalább mennyi óránkénti eső esetén érne a kiömlő víz a tartálytól a lehető legtávolabb földet?

d) Mekkora ez a távolság?

(A lyukon kiáramló víz pályáját az eső nem zavarja meg. Az esőcseppek kis sebességgel érkeznek. $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

(dr. Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás: A tartály területe a térfogatából és magasságából

$$V = Al \rightarrow A = \frac{V}{l} = \frac{2 \text{ m}^3}{2,5 \text{ m}} = 0,8 \text{ m}^2.$$

A
$$v_e = 25 \frac{\text{mm}}{\text{h}} = 6,94 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességű eső $6,94 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ vízszint-emelkedési sebességet jelentene a tartály tetejénél.

Az ábra jelöléseit használva:

a) A Bernoulli-törvény, vagy az energia-megmaradás alapján a kiáramló víz sebessége:

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Az eső által hozott vízmennyiség:

$$\Delta V = Av_e \Delta t.$$

Ez a víz távozik a lyukon (folytonossági egyenlet), ezért:

$$Av_e \Delta t = A'v \Delta t.$$

A kiömlőnyílás keresztmetszete

$$A' = r^2 \pi = \frac{d^2}{4} \pi = \frac{(1,6 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2}{4} \cdot \pi = 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

területű. Ezzel a kiömlési sebesség:

$$v = \frac{Av_e}{A'} = \frac{0,8 \text{ m}^2 \cdot 6,94 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 2,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A sebességre kapott képletből:

$$y = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(2,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,39 \text{ m},$$

ezért a lyuk $h = l - y = 2,5 \text{ m} - 0,39 \text{ m} = \mathbf{2,11 \text{ m}}$ magasságban keletkezett.

b) A kiáramló víz ebből a magasságból $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ idő alatt ér földet. Ez alatt vízszintesen

$$x = vt = \sqrt{2gy} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{yh} = 2\sqrt{0,39 \text{ m} \cdot 2,11 \text{ m}} = 1,814 \text{ m} \text{-rel}$$

kerül arrébb.

c) Az $x = 2\sqrt{yh}$ a számtani-mértani közép egyenlőtlenség alapján akkor a legnagyobb, ha

$$y = h = 1,25 \text{ m},$$

azaz

$$\frac{l}{2} = \sqrt{yh} \rightarrow y = h = \frac{2,5 \text{ m}}{2} = 1,25 \text{ m}.$$

Ehhez $v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,25 \text{ m}} = 4,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kiömlési sebesség tartozik.

Visszaszámolva a folytonossági egyenletből:

$$v_e = \frac{A'}{A} v = \frac{2,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{0,8 \text{ m}^2} 4,95 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,244 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 44,8 \frac{\text{mm}}{\text{h}}.$$

Vagyis ha legalább 44,8 mm eső esik óránként, akkortól jut el a víz a legmesszebbre. Ennél messzebb nem juthat. A felesleges víz kifolyik a tartály pereménél.

d) A távolság ebben az esetben:

$$x = vt = \sqrt{2gy} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{yh} = 2\sqrt{1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2,5 \text{ m}.$$

37. Mikola Sándor fizikaverseny 2018 Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam
Szakgimnázium

Megoldások

1. Egy $\beta = 1,2 \text{ s}^{-2}$ szöggyorsulással álló helyzetből induló, $r = 1 \text{ m}$ sugarú, vízszintes síkú forgó tárcsa szélére egy kis testet helyeztünk.

a) Milyen irányban repül le a kis test, és

b) milyen irányú a testre ható erők eredője a megcsúszás pillanatában az indulási irányához képest, ha a test és a tárcsa közötti tapadási együttható $\mu_0 = 0,457$?

(Csányi Sándor, Szeged)

Megoldás: a) A test érintőleges (tangenciális) gyorsulása:

$$a_t = \beta r$$

Pillanatnyi sebessége:

$$v = a_t t.$$

Centripetális gyorsulása:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

Az eredő gyorsulása:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{r^2 \beta^2 t^2}{r}\right)^2}.$$

A test akkor csúszik meg, ha a ráható erők eredője meghaladja a tapadási erő maximumát.

$$\sum F = ma > \mu_0 F_{ny},$$

azaz

$$\sqrt{a_t^2 + \left(\frac{r^2 \beta^2 t^2}{r}\right)^2} > \mu_0 g,$$

átalakítva:

$$a_t^2 + r^2 \beta^4 t^4 > (\mu_0 g)^2,$$

ahonnan az eltelt idő:

$$t > \sqrt[4]{\frac{(\mu_0 g)^2 - a_t^2}{r^2 \beta^4}} = \sqrt[4]{\frac{\left(0,457 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 - \left(1,2 \frac{1}{\text{s}^2} 1 \text{ m}\right)^2}{1 \text{ m}^2 \cdot \left(1,2 \frac{1}{\text{s}^2}\right)^4}} = 1,75 \text{ s}.$$

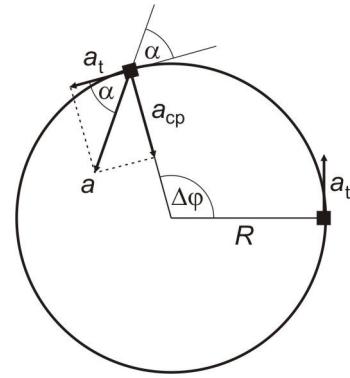
Az ehhez tartozó szögelfordulás:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{2} \beta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \text{ s}^{-2} \cdot 1,75^2 \text{ s}^2 = 1,838 \text{ rad} \approx 105,3^\circ.$$

A (nem méretarányos) ábra alapján

$$\frac{F_{cp}}{F_t} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{m \frac{v^2}{r}}{mr\beta} = \frac{v^2}{r^2\beta} = \frac{(r\beta t)^2}{r^2\beta} = \beta t^2 = 1,2 \frac{1}{s^2} \cdot 1,75^2 s^2 = 3,675.$$



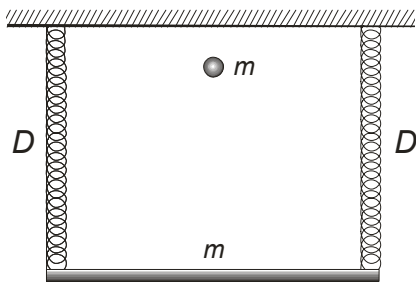
Innen

$$\alpha = \operatorname{arctg} 3,675 = 80,97^\circ \approx 74,8^\circ.$$

A bezárt szög kb. 75 fok.

b) A test érintő irányban távozik, azaz 105,3 fokos szöget bezárva az indulási irányához képest, a testre ható erők eredője 153 fok + 74,8 fok = **180,1 fokkal fordul el.**

2. Az ábrán látható m tömegű rúd az azonos hosszúságú és D direkción erejű rugókat $x = 5$ cm-rel nyújtotta meg a rendszer nyugalmi állapotában. A rúdra bizonyos magasságból ráejtettünk egy szintén m tömegű testet. Az ütközés centrális volt, és a kis test rátapadt a rúdra. Ezt követően a rugók legnagyobb megnyúlása négyszeresére nőtt.



a) Milyen magasról ejtettük a kis testet?

b) A test és a rúd mozgása során mekkora volt a legnagyobb sebesség?

(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás.

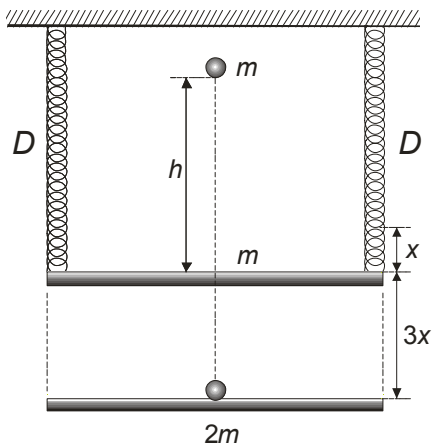
a) A kezdeti egyensúlyi állapotban a rúd súlya és a rugóerő nagysága azonos volt:

$$mg = 2Dx. \quad (1)$$

A mechanikai energia-megmaradás törvénye szerint:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$



ahonnan

A rugalmatlan ütközésre a lendület-megmaradás törvényét írjuk fel:

$$mv = 2mu.$$

Innen

$$u = \frac{v}{2} = \sqrt{0,5gh}. \quad (3)$$

Az együttmozgó testek esetén a legnagyobb megnyúlásnál a munkatétel szerint ($\sum W = \Delta E_{kin}$), vagyis a nehézségi erő és a rugóerők összmunkája a mozgási energia

megváltozásával egyenlő:

$$2mg \cdot 3x - \left(\frac{1}{2}2D(4x)^2 - \frac{1}{2}2Dx^2 \right) = 0 - \frac{1}{2}2mu^2.$$

$$6mg \cdot x - D16x^2 + Dx^2 = 0 - mu^2$$

Rendezve, és (3.)-ból u kifejezését behelyettesítve, rendezve:

$$6mg \cdot x = -m \cdot 0,5gh + 15Dx^2. \quad (4.)$$

Az (1.) egyenlet figyelembevételével:

$$D = \frac{mg}{2x},$$

amit (4.)-be írva kapjuk:

$$6mg \cdot x = -m \cdot 0,5gh + 15 \cdot \frac{mg}{2x} x^2 \rightarrow 6mg \cdot x = -m \cdot 0,5gh + 7,5 \cdot mgx.$$

Egyszerűsítve és rendezve:

$$-1,5 \cdot x = -0,5h,$$

Innen a keresett magasság:

$$h = 3x = 3 \cdot 5 \text{ cm} = \mathbf{15 \text{ cm}}.$$

b) Az együttmozgó testek az ütközés pillanatától kezdve lefelé gyorsultak mindaddig, amíg a rájuk ható erők eredője lefelé irányult. Az új egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában:

$$2mg - 2Dy = 0$$

(1.)-et figyelembe véve:

$$2mg - 2 \frac{mg}{2x} y = 0 \rightarrow y = 2x.$$

A munkatételt alkalmazva a $2x$ megnyúlásra:

$$2mgx - \left(\frac{1}{2} 2D(2x)^2 - \frac{1}{2} 2Dx^2 \right) = \frac{1}{2} 2mv_{\max}^2 - \frac{1}{2} 2mu^2$$

Egyszerűsítés és rendezés után:

$$2mgx - D3x^2 = mv_{\max}^2 - mu^2.$$

(3.) egyenlet figyelembe vételével, ahol $h = 3x$ egyenletet felhasználjuk:

$$2mgx - \frac{mg}{2x} 15x^2 = mv_{\max}^2 - 2m \cdot 0,5g3 \cdot x.$$

Egyszerűsítés és rendezés után kapjuk:

$$2mgx - \frac{mg}{2x} 3x^2 = mv_{\max}^2 - m \cdot 0,5g \cdot 3x \rightarrow 2gx - 1,5gx = v_{\max}^2 - 0,5g \cdot 3x,$$

ahonnan a keresett legnagyobb sebesség:

$$v = \sqrt{2gx} \rightarrow \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,05 \text{ m}} = \mathbf{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}.$$

3. Vízszintes talajon mozgó $M = 0,5$ kg tömegű hasábra $h = 20$ cm magasságból $m = 0,1$ kg tömegű gyurmát ejtünk. A hasáb sebessége az ütközés kezdetekor $v_0 = 3$ m/s. A két test $\Delta t = 10^{-2}$ s időtartamú ütközés során összetapad.

a) Mekkora átlagos nyomóerőt fejt ki a gyurma a hasábra az ütközés alatt?

b) Mekkora lesz az ütközés után a közös sebesség, ha a hasáb és a talaj közötti csúszási súrlódási együttható

1. elhanyagolható?

2. értéke 0,4?

(Számoljunk $g = 10$ m/s²-tel!)

(Szkkladányi András, Baja)

Megoldás. a) A gyurma függőleges irányú sebessége az ütközés előtti pillanatban:

$$v_y = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ m}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A gyurma által kifejtett átlagos nyomóerő az ütközésre függőleges irányban felírt lendülettétel alapján határozható meg (pozitív irány felfelé):

$$m\Delta v_y = (F_{\text{ny}} - mg) \cdot \Delta t$$

$$F_{\text{ny}} = m \left(g + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) = 0,1 \text{ kg} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-2} \text{ s}} \right) = 21 \text{ N}.$$

b) Ha a súrlódás elhanyagolható, akkor a közös sebesség az ütközésre vízszintes irányban felírt lendület-megmaradás alapján:

$$Mv_0 = (m + M)v_k,$$

ahonnan

$$v_k = \frac{M}{m + M} v_0 = \frac{0,5 \text{ kg}}{0,1 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg}} 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ha a súrlódás nem hanyagolható el, akkor az ütközésre vízszintes irányban felírt lendülettétel szerint (pozitív irány a hasáb eredeti haladási iránya):

$$m\Delta v + M\Delta V = \sum F \Delta t,$$

részletezve:

$$mv'_k + M(v'_k - v_0) = -\mu(F_{\text{ny}} + Mg)\Delta t.$$

Innen a közös sebesség közvetlenül az ütközés befejeződése után:

$$v'_k = \frac{Mv_0 - \mu(F_{\text{ny}} + Mg)\Delta t}{m + M} = \frac{0,5 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,4 \left(21 \text{ N} + 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot 10^{-2} \text{ s}}{0,1 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg}} \approx 2,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4. Egy pontszerűnek tekinthető, $m = 0,5 \text{ kg}$ tömegű testet $l = 30 \text{ cm}$ hosszú fonálra erősítettünk, amelynek másik végét vízszintesen rögzített szöghöz kötöttük. Ezután a fonalat egyenesnek tartva az így kapott ingát a vízszintesig kitérítettük.

a) Legalább mekkora függőleges, lefelé irányuló kezdősebességgel kell meglökni az inga gömbjét, hogy az végig haladjon a körpályáján?

b) Mekkora a fonálerő a pálya legalsó pontjában?

c) Az a) -ban számított minimális sebesség hány százalékaival indítottuk lefelé az inga gömbjét, ha a fonál 210° -os elfordulás pillanatában lazult meg? (A légellenállás elhanyagolható.)

(Holics László, Budapest)

Megoldás. a) A legkisebb sebesség azt jelenti, hogy amikor eléri a háromnegyed fordulatot az inga gömbje, a fonálban végig hason az egyre csökkenő fonálerő, és a pálya legfelső pontjában váljon csak zérussá. (Ezután a fonálerő ismét növekedni fog, vagyis az inga gömbje tovább folytatja körpályán a mozgását.)

Ha valamikor v_{\min} sebességgel elindítottuk a kis testet, félfordulat megtétele pillanatában sebessége ismét az indítási sebesség nagyságával halad, csak felfelé. A keresett minimális sebességet a továbbiakban számíthatjuk úgy, mintha innen indult volna a kis test. A munkatétel, valamint a Newton-törvény adja meg a választ a kérdéseinkre:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = -mgl$$

$$v_1^2 - v_{\min}^2 = -2gl \quad \rightarrow \quad v_{\min}^2 = v_1^2 + 2gl$$

ahol v_1 a legfelső pontbeli sebesség.

A legfelső pontban a körmozgáshoz tartozó centripetális gyorsulás éppen a g nehézségi gyorsulás, mert ebben a pillanatban semmi más erő nem hat az inga gömbjére, mint a nehézségi erő. Így ez kifejezve a pillanatnyi sebességgel és a körpálya sugarával:

$$g = \frac{v_1^2}{l}.$$

Innen
$$v_1^2 = gl.$$

Ezt a minimális indítási sebesség kifejezésébe írva kapjuk az eredményt:

$$v_{\min}^2 = 3gl \quad \rightarrow \quad v_{\min} = \sqrt{3gl} = \sqrt{3 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,3 \text{ m}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) A pálya legalsó pontjában Newton II. törvénye szerint:

$$K - mg = m \frac{v_{\max}^2}{l},$$

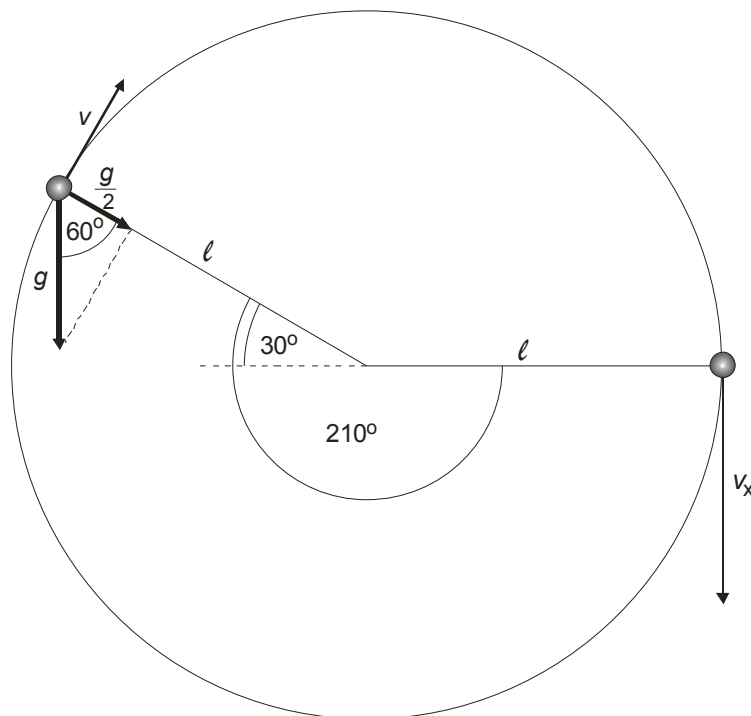
ahol a maximális sebesség a munkatételből:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = mgl \quad \rightarrow \quad v_{\max}^2 = 2gl + v_{\min}^2 = 2gl + 3gl = 5gl.$$

Ezzel a fonálerő:

$$K = m \frac{v_{\max}^2}{l} + mg = m \frac{5gl}{l} + mg = 6mg = 6 \cdot 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 30 \text{ N}.$$

c) Ha 120 fokot fordult el a fonál az indulástól kezdve, akkor abban a pillanatban 30 fokos szöveget zár be a vízszintessel. Mivel ekkor a fonál meglazul, ettől kezdve csak a nehézségi erő hat az inga gömbjére. A sebesség- és erőviszonyokat az ábrából láthatjuk:



Az ábrából látszik, hogy a fonál meglazulása pillanatában a centripetális gyorsulás éppen $g/2$, ugyanis egy 60 fokos („szabályos”), g oldalú háromszög egyik oldalának a fele. Ez, mint centripetális gyorsulás a pillanatnyi v sebességgel a következő kapcsolatban van:

$$\frac{g}{2} = \frac{v^2}{l} \rightarrow v^2 = \frac{gl}{2}.$$

Ekkora sebességgel halad itt az inga gömbje. A szabályos háromszög-részletre tekintve az ábrán, láthatjuk, hogy a vízszintes helyzettől való emelkedés magassága éppen $l/2$. A munkatétel ismét megadja a választ kérdésünkre

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_x^2 = -mg \frac{l}{2} \rightarrow v_x^2 = v^2 + gl.$$

Beírva a fonál lazuláskori sebesség kifejezését kapjuk:

$$v_x = \sqrt{\frac{gl}{2} + gl} = \sqrt{\frac{3}{2}gl}.$$

A kért százalékarány:

$$p = \frac{v_x}{v_{\min}} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}gl}}{\sqrt{3gl}} \cdot 100\% = \sqrt{0,5} \cdot 100\% = 70,71\%$$